

倾斜推移体激发颗粒流的连续介质模型*

郭 鸿^{1,2}, 骆亚生², 程大伟³, 陈 茜¹, 陈栋梁¹

(1. 陕西理工学院土木工程与建筑学院, 陕西 汉中 723001;

2. 西北农林科技大学水利与建筑工程学院, 陕西 杨凌 712100;

3. 长安大学环境科学与工程学院, 陕西 西安 710064)

摘要: 岩土工程中的土方推移等属于颗粒体的倾斜推移问题, 探索了倾斜推移体在颗粒中平动推移时所受的阻力和升力。应用惯性数的理念, 确定了流态类型, 提出了适合非准静态流的广义摩擦系数。在此基础上, 用基于改进的库伦被动土压力理论, 通过基于二维颗粒离散元的位移场分析, 建立了预测推移阻力和升力的楔体模型。结果表明, 在其他条件相同时, 推移阻力不随推移体的倾角变化, 但是升力随倾角的增大而显著减小。升力和阻力分别是作用在推移体上合力的竖直分量和水平分量, 且阻力和升力的比值为推移体倾角的正切值。广义摩擦角是推移速度和倾角的二次函数。所建立的模型可以预测不同倾角和推移速度时推移阻力和升力的大小。

关键词: 推移阻力和升力; 改进库伦模型; 颗粒介质; 倾斜平板

中图分类号: TU443 **文献标志码:** A **文章编号:** 0529-6579(2015)06-0094-05

A Continuum Model of Granular Flow Induced By Inclined Plane

GUO Hong^{1,2}, LUO Yasheng², CHENG Dawei³, CHEN Xi², CHEN Dongliang¹

(1. School of Civil Engineering and Architecture, Shaanxi University of
Technology, Hanzhong 723001, China;

2. Institute of Water Resources and Hydropower Research, Northwest A&F University,
Yangling 712100, China;

3. School of Environmental Science and Engineering, Chang'an University, Xi'an 710064, China)

Abstract: Soils moving is one of the geotechnical problems, which can be described as a granular flow induced by inclined plane. This work aims to investigate the drag and lift forces acting on the inclined intruder. By using the inertial number concept to confirm the flow regime, a parameter named dynamic friction coefficient is induced to this non-quasi-static flow. By improving the Coulomb model, the displacement field is obtained by two dimensional discrete element method, and the wedge model for drag and lift forces is built. The results show that drag force is dependent of the inclined angle when the other conditions are the same, but the lift force is decreasing with the inclined angle. Drag and lift forces are the horizontal and vertical components of the total force, respectively. And the ratio of drag and lift forces is just equal to the tangent value of the inclined angle. The dynamic friction angle is the quadratic function of velocity and inclined angle. This model can predict different case in different inclined angle and velocity.

Key words: drag and lift forces; modified Coulomb model; granular media; inclined plane

* 收稿日期: 2015-03-12

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51178392); 陕西省教育厅专项科研计划资助项目(15JK1117)

作者简介: 郭鸿(1984年生), 男; 研究方向: 岩土力学离散元方面; 通讯作者: 骆亚生; E-mail: lyas1967@nwsuaf.edu.cn

颗粒物质在自然界广泛存在，地球表面几乎全部被颗粒物质覆盖，如土壤、沙漠、海底沉土、积雪等^[1]。颗粒流作为颗粒运动的一种形式，近年来越来越受到研究人员的重视^[2-14]。颗粒流整体表现出来的力学特性很难用传统的力学理论描述，因此世界顶级科学杂志 Science 把能否建立颗粒材料的运动学的综合理论列为当今世界上最前沿的 125 个问题之一^[15]。

很多岩土材料诸如砂石等可以看作是颗粒的聚集体，场地平整中的土方推移（图 1）就属于典型的倾斜推移体激发颗粒流问题。很多学者对颗粒推移问题做了大量的室内实验方面和数值模拟方面的研究工作^[12,16-18]。

在岩土工程应用方面，场地平整时，土体往往会对机械产生水平方向的阻力以及垂直方向的升力，前者 and 机械的动力选择有关，而后者则和机械本身自重选择有关。另外，实际工程经验表明，机械推移土方时其速度和推移角度对工程的效率有明显的影响。然而，以上两点并未得到理论的定量分析和研究。

基于此，本文立足于简化后的土方推移模型，采用颗粒离散元数值分析的方法，结合改进库伦模型，给出了阻力和升力关于推移角度和速度的预测模型，旨在为岩土工程场地平整及推土机械设计等问题提供更多方面的理论参考。

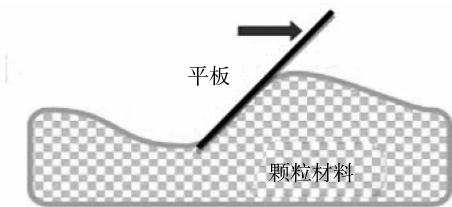


图 1 土方推移的理论简化模型
Fig. 1 Simplified model for soil moving

1 数值实验装置及结果

1.1 数值实验模型

在文 [19] 的基础上，本文运用改进后的离散元模型，全面分析了倾斜平板的运动速度和侵入倾角对阻力和升力的影响。本文建立的离散元模型图和位移场分别如图 2 所示。在此模型中，容器高 0.3 m，宽 0.6 m，侵入深度 0.08 m，平板的倾角分别为：30°、45°和 60°，速度分别为 0.2，0.1 和 0.02 m/s，每组数值实验均重复 50 次取其平均值。由于在匀速推动作用下颗粒材料的变形处于线弹性

范围内^[20]，故本文颗粒接触采用最简单的线性接触模型，但考虑到颗粒在实际中的能量损耗，故同时采用法向阻尼系数。具体参数为：颗粒半径（5 ± 1）mm（即半径在 4 ~ 6 mm 范围内随机分布），颗粒密度按照玻璃珠实际密度 2 550 kg/m³，孔隙率按照中等密实度材料取 0.16，平板刚度取为颗粒刚度的 10 倍，时间步长按照典型时步 20% 取值为 6.2 × 10⁻⁵ s，粘性阻尼系数采用文 [21] 中的标定方法，取 0.02。

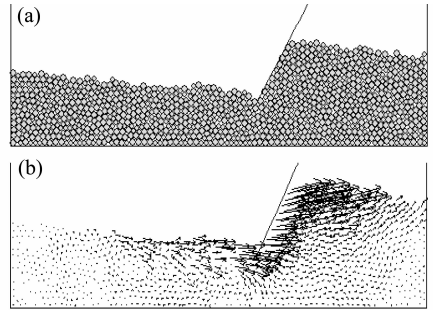


图 2 离散元模型 (a) 以及位移场 (b) 示意图
Fig. 2 DEM model (a) and displacement field (b)

1.2 速度对阻力和升力的影响

图 3 反映的是侵入角度 Ψ （平板倾角）为 60° 时下速度对阻力和升力的影响。阻力和升力都随着运动速度的增大而增大。由于倾斜平板的复杂性，本文暂时不考虑其边界效应（即平板运动接近终点边界时阻力迅速增加时的情景）^[22]，在实际离散元模拟中也进行了位移总量控制。需要指出的是：阻力的单位为负，指的是颗粒对平板的水平作用力

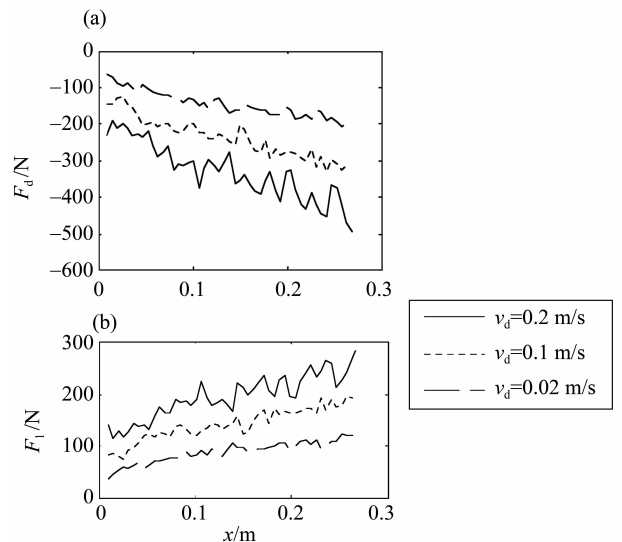


图 3 速度对阻力 (a) 和升力 (b) 的影响 ($\Psi = 60^\circ$)
Fig. 3 Effect of velocity on drag (a) and lift force (b) ($\Psi = 60^\circ$)

相反于其水平运动方向；升力的单位为正，指的是颗粒对平板的竖直作用力相反于重力方向。

1.3 侵入角度对阻力和升力的影响

图 4 表达的是速度为 0.1 m/s 时倾角阻力和升力的影响。可以看出，倾角对阻力几乎没有影响，而对升力的影响非常显著，具体表现是倾角越小升力越大，倾角越大升力越小。这就意味着无论多大的倾角，只要侵入深度一定，其阻力都相同。

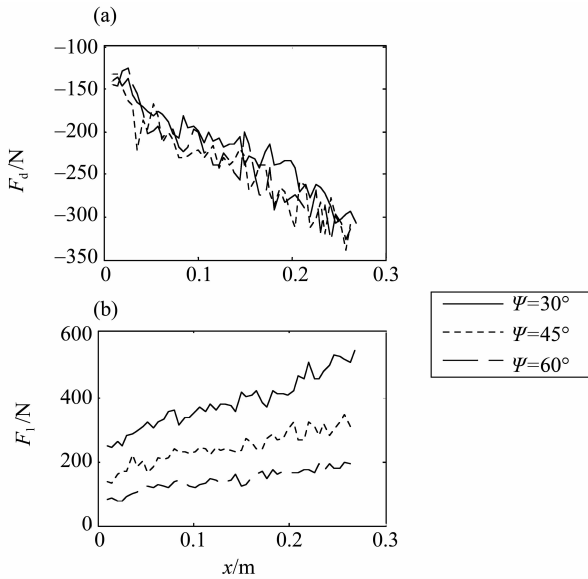


图 4 侵入角度对阻力(a)和升力(b)的影响 ($v_d = 0.1 \text{ m/s}$)

Fig. 4 Effect of attack angle on drag (a) and lift force (b) ($v_d = 0.1 \text{ m/s}$)

1.4 阻力和升力的关系

将不同速度和不同倾角情况下的升力与阻力继续归一化，以升力和平板倾角的正切值乘积为纵坐标，以阻力的值为横坐标，所有的数值均落在一条直线上（如图 5 所示）。这就说明阻力和升力的比值恰好等于平板倾角 Ψ 的正切值。也就是说，对

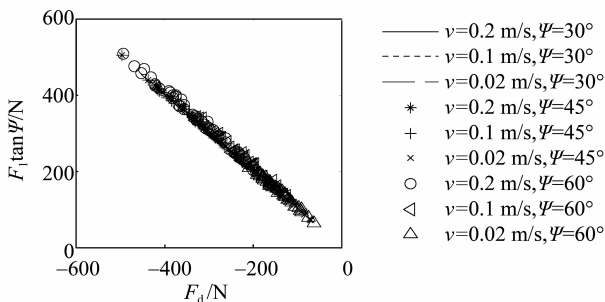


图 5 不同侵入角度和速度时 F_d 和 $F_l \tan \Psi$ 的关系曲线

Fig. 5 Relation of F_d and $F_l \tan \Psi$ in different attack angles and velocities

于任意倾角的平板，阻力和升力分别是作用在平板上合力在水平方向和竖直方向的分量，如图 6 所示。

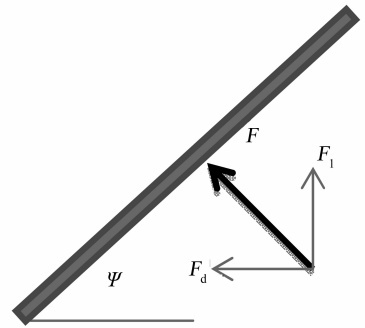


图 6 阻力和升力的关系示意图

Fig. 6 Schematic diagram for relation of drag and lift force

2 阻力和升力的连续介质模型

2.1 预测模型的数学推导

如图 7 所示，当倾斜平板水平移动距离 x ，其正前方会堆起高为 h 的颗粒堆积，该堆积和水平方向的夹角为 α_r ，从平板底部到堆积趾部是剪切带，剪切带和水平方向的夹角为 θ_1 ，侵入深度为 Z 。

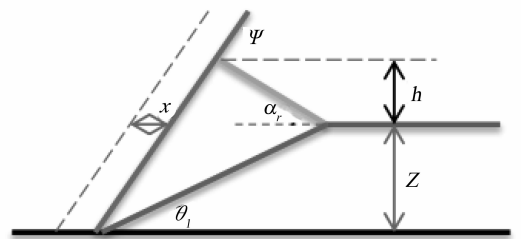


图 7 改进库伦土压力理论的几何模型

Fig. 7 Geometric model of modified Coulomb theory

由几何关系得知，堆积高度为

$$h = \sqrt{\frac{2xz}{1/\tan \Psi + 1/\tan \alpha_r}} \quad (1)$$

三角形楔体的面积为

$$S = \frac{h}{2} (h + Z) \left(\frac{1}{\tan \Psi} + \frac{1}{\tan \alpha_r} \right)$$

剪切和水平面的倾角的正切值为

$$\tan \theta_1 = \frac{Z}{h \left(\frac{1}{\tan \Psi} + \frac{1}{\tan \alpha_r} \right) + \frac{Z}{\tan \Psi}}$$

由力的平衡得出作用在倾斜平板上的合力为

$$F = \frac{S \rho^* g (\mu \cos \theta_1 + \sin \theta_1)}{\sin \Psi (\cos \theta_1 - \mu \sin \theta_1) - \cos \Psi (\mu \cos \theta_1 + \sin \theta_1)} \quad (2)$$

式中 μ 是广义摩擦系数，它等于广义摩擦角 φ_d 的正切值， ρ^* 是颗粒堆积密度。

根据合力与阻力和升力的关系，可得出

$$F_d = F \sin \Psi \quad (3)$$

$$F_l = F \cos \Psi \quad (4)$$

2.2 预测模型的离散元模拟验证

如图 8 所示，以平板倾角的正切值为横坐标，阻力和升力的比值为纵坐标。可以看出，本文中的阻力值比文 [23] 中的略小，产生这种情况的原因可能是本文的结果来源于数值模拟，而且没有考虑平板的摩擦阻力，而对方则采用摩擦系数较小的刚性板。考虑摩擦力时，竖直方向的升力就会受到摩擦阻力竖向分量的抵消，因此升力相对会变小；同时，水平方向的阻力会因摩擦阻力的水平分量而增加，在这双重因素的影响下，阻力和升力的实验值就大于模拟值。

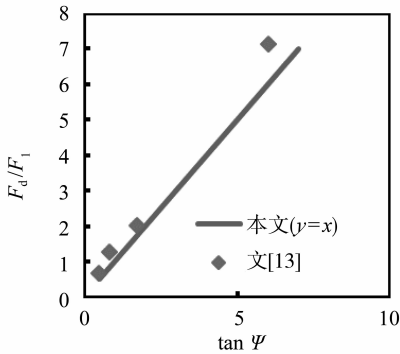


图 8 本文数值模拟结论和前人结论的对比

Fig. 8 Comparison of simulation value and previous results

图 9 反映了式 (2) 预测合力的能力，可以看出，对于不同的速度和倾角，预测效果都非常好。需要说明的是，该预测公式属于单变量式模型，对于不同的速度和倾角只需调整广义摩擦角 φ_d 。表 1 所表达的正是不同情况下的广义摩擦角。可以看出，广义摩擦角随着速度的增大而增大，随着倾角的增大而增大。平板倾角对合力的影响规律可做如下解释：在其他条件相同的条件下，倾角越大，颗粒的堆积高度越大，在每个时步内，剪切带的倾角也相应增大，推动平板的难度也就越大，而作用的总体积相同，这就意味着越大的倾角将会产生越“陡”的剪切带，因此广义摩擦角也就越大。

将不同倾斜角和速度对广义摩擦角的影响归纳，如表 1 所示。可以看出，广义摩擦角是倾角 Ψ 和速度 v_d 的二次函数。

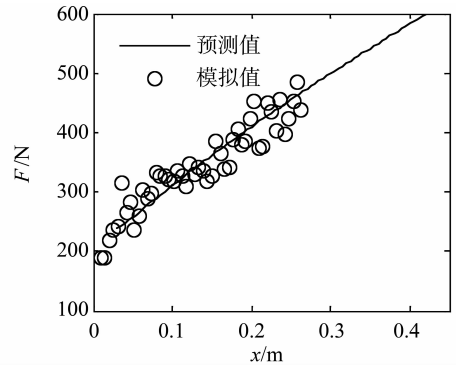


图 9 推移合力的模拟值和预测值

($v_d = 0.1 \text{ m/s}, \Psi = 45^\circ$)

Fig. 9 Simulated and predicted values for total drag force

表 1 不同倾斜角度和速度下的广义摩擦角 φ_d

Table 1 Dynamic angle under different inclined angles and velocities

$v_d / (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$	$\Psi / (^\circ)$		
	30	45	60
0.2	10	16	20
0.1	8	12	15
0.02	5	6	8

因此在其他条件相同时，广义摩擦角可表达为

$$\varphi_d = f(v_d, \Psi) =$$

$$a_0 + a_1 v_d + a_2 \Psi + a_3 v_d^2 + a_4 \Psi^2 + a_5 v_d \Psi$$

根据本文的拟合结果，各参数为：

$$a_0 = -1.947, a_1 = 28.88, a_2 = 12.52,$$

$$a_3 = -166.7, a_4 = -4863, a_5 = 73.58$$

图 10 可以得出 0 ~ 0.2 m/s 速度范围内和 0 ~ 60° 平板倾角范围内的广义摩擦角。

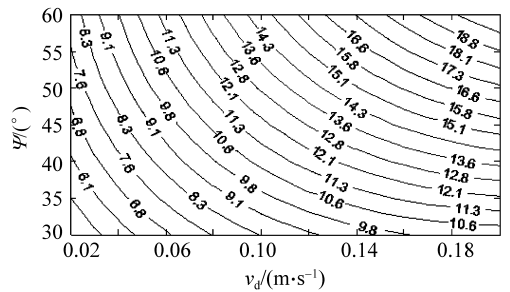


图 10 广义摩擦角 (φ_d) 与速度和倾斜角的关系

Fig. 10 Relation of dynamic frictional angle vs velocity and attack angle

3 结 论

本文通过对倾斜平板在颗粒中的运动行为，应用离散元分析方法，基于改进后的库伦被动土压力

理论,建立了动态情况下的推力和升力模型,得出了平板运动速度和倾角对其影响规律,主要结论如下:①在一定的侵入深度下,阻力和升力随速度增大线性增大;②平板倾角对阻力几乎没有影响,但是升力随平板倾角减小而线性增大;③阻力和升力的比值等于平板的倾角;④广义摩擦角和平板倾角以及推移速度呈二次函数关系。

根据本文得出的结论可知,推动土体的倾角越小,推动速度越快,机械所受的阻力和升力也就越大,这就意味着在这种情况下,需要更大动力和自重更大的机械来完成。反之,推动土体的倾角越接近垂直,推动速度越慢,则阻力和升力也就相应越小,这就意味着动力和自重较小的机械就可以完成。

岩土工程中的场地平整需要同时考虑工作效率和机械经济成本,所以基于颗粒流方法的推移速度对土方推移效率和所需总机械功的影响将是进一步需要研究的问题。

参考文献:

[1] GOLDSMITH J, GUO H, Hunt S N, et al. Drag on intruders in granular beds: A boundary layer approach[J]. *Physical Review E*, 2013, 88(3): 030201.

[2] POULIQUEN O, FORTERRE Y, LEDIZES S. Dense granular flows down incline as a self activated process [J]. *Advances in Complex Systems*, 2001(4): 441 - 450.

[3] JIANG Y, LIU M. Energetic instability unjams sand and suspension [J]. *Physical Review Letters*, 2004, 93(14): 148001.

[4] 孙其诚,王光谦. 颗粒物质力学导论[M]. 北京: 科学出版社, 2009.

[5] GENG J, BEHRINGER R P. Slow drag in two-dimensional granular media[J]. *Physical Review E*, 2005, 71(1): 011302.

[6] JOP P, FORTERRE Y, POULIQUEN O. A constitutive law for dense granular flows [J]. *Nature*, 2006, 441(7094): 727 - 730.

[7] POULIQUEN O, CASSAR C, JOP P, et al. Flow of dense granular material: towards simple constitutive laws [J]. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2006,2006(7): 07020.

[8] 游碧波,周翠英. 双层堤基条件下管涌逸出的颗粒流模拟[J]. *中山大学学报:自然科学版*,2010,49(6):42 - 48.

[9] RYCROFT C H, KAMRIN K, BAZANT M Z. Assessing continuum postulates in simulations of granular flow[J].

Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2009, 57(5): 828 - 839.

[10] GRAVISH N, UMBANHOWAR P B, GOLDMAN D I. Force and flow transition in plowed granular media[J]. *Physical Review Letters*, 2010, 105(12): 128301.

[11] DING Y, GRAVISH N, GOLDMAN D I. Drag induced lift in granular media [J]. *Physical Review Letters*, 2011, 106(2): 028001.

[12] PERCIER B, MANNEVILLE S, MCELWAIN J N, et al. Lift and drag forces on an inclined plow moving over a granular surface [J]. *Physical Review E*, 2011, 84(5): 051302.

[13] HEWITT I J, BALMFORTH N J, MCELWAIN J N. Granular and fluid washboards [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2012, 692: 446 - 463.

[14] POTIGUAR F Q, DING Y. Lift and drag in intruders moving through hydrostatic granular media at high speeds [J]. *Physical Review E*, 2013, 88(1): 012204.

[15] So Much More to know [N]. *Science*, 2005, 309, (5731):78 - 102.

[16] MATHER K B. Why do roads corrugate? [M]. *Scientific American*, 1963.

[17] TABERLET N, MORRIS S W, MCELWAIN J N. Washboard road: the dynamics of granular ripples formed by rolling wheels [J]. *Physical Review Letters*, 2007, 99(6): 068003.

[18] GOLDMAN D I, UMBANHOWAR P. Scaling and dynamics of sphere and disk impact into granular media [J]. *Physical Review E*, 2008, 77(2): 021308.

[19] GUO H, GOLDSMITH J, DELACRUZ I, et al. Semi-infinite plates dragged through granular beds [J]. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2012,2012(7): 07013.

[20] 宜晨虹,慕青松,苗天德,等. 带有点缺陷的二维颗粒系统离散元模拟 [J]. *物理学报*,2008,57(6):3636 - 3640.

[21] 钟文镇,何克晶,周照耀,等. 颗粒离散元模拟中的阻尼系数标定 [J]. *物理学报*,2009,58(8):5155 - 5161.

[22] 吴迪平,李星祥,秦勤,等. 离散颗粒层被横向推移过程中的力学行为研究 [J]. *物理学报*,2014,63(9): 90566 - 90571.

[23] MALADEN R D, DING Y, UMBANHOWAR P B, et al. Undulatory swimming in sand: experimental and simulation studies of a robotic sandfish [J]. *The International Journal of Robotics Research*, 2011, 30(7): 793 - 805.